Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

Blatt 12

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 29.01, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 12.1 (5 + 5 + 5 Punkte) Wir betrachten die zwei Geraden $L, M \subseteq \mathbb{R}^2$

$$L = \{y = 1\}, \qquad M = \{x - y = 1\}$$

(i) Schreiben Sie die zwei Spiegelungen mit Achsen L und M

$$\sigma_L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \sigma_M \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

explizit als affine Transformationen.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sigma_L \circ \sigma_M$ eine Drehung ist. Bestimmen Sie das Drehzentrum und den Drehwinkel.

(iii) Seien nun $L, M \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei beliebige, nicht-parallele Geraden, und seien σ_L, σ_M die zwei Spiegelungen. Zeigen Sie, dass $\sigma_L \circ \sigma_M$ eine Drehung ist und bestimmen Sie das Drehzentrum.

Aufgabe 12.2 (5 + 5 + 5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $M_1, M_2, M_3 \subseteq \mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ drei projektive Linien, die nicht in einer gemeinsamen Hyperebene liegen und von denen keine zwei in einer gemeinsamen Ebene liegen.

(i) Zeigen Sie, dass $\dim L(M_i, M_j) = 3$ für alle $1 \le i < j \le 3$.

(ii) Sei $M \subseteq \mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ eine Gerade so dass $M \cap M_i \neq \emptyset$ für alle $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass

$$M \subseteq L(M_1, M_2) \cap L(M_1, M_3) \cap L(M_2, M_3)$$

(iii) Zeigen Sie, dass $L(M_1, M_2) \cap L(M_1, M_3) \cap L(M_2, M_3)$ eine Gerade ist, so dass eine einzige Gerade die M_1, M_2, M_3 schneidet existiert.

Aufgabe 12.3 (5 + 5 Punkte) Wir erinnern uns, dass jede Möbiustransformation von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als Komposition einiger der folgenden Arten von Möbiustransformationen erhalten werden kann:

$$t_b(z) = z + b, \qquad s_\lambda(z) = \lambda \cdot z, \qquad r_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot z, \qquad \iota(z) = \frac{1}{z}$$

mit $b \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}^\times, \theta \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie jetzt die folgende Möbiustransformation:

$$f(z) = \frac{z+2}{z+3}.$$

(i) Schreiben Sie f als eine Komposition von Möbius-Transformationen der Form $t_b, s_\lambda, r_\theta, \iota$ wie oben. (*Hinweis: Proposition 2.6.14*).

(ii) Betrachten Sie den Einheitskreis S_1. Wenn $f(S^1)$ ein verallgemeinerter Kreis $\ell \cup \{\infty\}$ für eine reelle Gerade ℓ ist, finden Sie eine Gleichung für ℓ. Wenn $f(S^1)$ ein Kreis $S_{z_0,r}$ ist, dann finden Sie den Mittelpunkt z_0 und den Radius r. (*Hinweis: Aufgabe 11.3*).